www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1989 **MATHEMATIQUES I** **TA**

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et Q le premier quadrant du plan $\mathbb{R}^2$ (muni de sa structure euclidienne naturelle), c'est-à-dire l'ensemble des couples de réels positifs au sens large.

On appelle S l'ensemble des suites réelles $(U_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$ suivante : pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n^2 + U_{n-1}^2\right)$

et telles, de plus, que l'on ait : $U_0 \geq 0$ et $U_1 \geq 0$.

On associe à tout élément (x, y) de Q la suite U(x,y) appartenant à S définie par $U_0 = x$ et $U_1 = y$.

Le terme de rang n de U(x, y) sera noté $U_n(x,y)$ ou, si aucune ambiguïté n'est possible, par U_n.

Enfin, λ désignant soit un nombre réel, soit $+\infty$, E_λ désignera l'ensemble des éléments (x,y) de Q tels que la suite U(x,y) ait pour limite λ.

Les partie II et III sont indépendantes.

Première partie : *Généralités*

I.1.a) Déterminer les suites constantes appartenant à S.

b) Quelles sont les limites possibles finies ou infinies d'une suite appartenant à S ?

c) Montrer que, si une suite appartenant à S a trois termes consécutifs égaux, c'est une suite constante.

d) Montrer que, si une suite appartenant à S a deux termes consécutifs égaux à 1, c'est une suite constante.

e) Que peut-on dire d'une suite appartenant à S dont un terme autre que les deux premiers est nul ?

I.2. Soit X et Y deux réels. Etablir les deux résultats suivants (on pourra dans l'un et l'autre cas utiliser une interprétation géométrique des inégalités) :

a) Si $0 \leq X \leq Y \leq \frac{X^2 + Y^2}{2}$, alors $Y \geq 1$ ou $X = Y = 0$.

b) Si $\frac{X^2 + Y^2}{2} \leq X \leq Y$, alors $Y \leq 1$.

I.3. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$. Comparer les signes de $U_{n+1} - U_n$ et de $U_n - U_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

I.4. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ *non constante* ; on suppose qu'il existe N tel que $U_{N-1} \leq U_{N+1}$ et $U_N \leq U_{N+1}$.

a) Etablir l'inégalité $U_N \leq U_{N+1} \leq U_{N+2}$

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq N}$ est croissante.

c) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq N+2}$ est strictement croissante.

d) En utilisant la question I.2, établir que $U_{N+1} \geq 1$ et montrer que la suite tend vers $+\infty$.

I.5. Soit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ non constante. On suppose qu'il existe N tel que $U_{N-1} \geq U_{N+1}$ et $U_N \geq U_{N+1}$

a) Montrer que la suite est strictement décroissante à partir d'un certain rang.

b) En utilisant les questions I.2, établir que $U_N \leq 1$. En déduire que la suite tend vers zéro.

I.6. On suppose que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ n'est pas constante et ne tend ni vers zéro, ni vers $+\infty$. On ne cherchera pas à montrer ici que cette situation peut se présenter.

a) Etablir qu'alors $U_0 \neq U_1$.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, U_n est compris strictement entre U_{n-1} et U_{n-2}.

c) On suppose $U_0 < U_1$. Etablir que la suite $(U_{2n})_{n\geq 0}$ croît strictement et que la suite $(U_{2n+1})_{n\geq 0}$ décroît strictement.

Etablir que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ a pour limite 1.

d) Etudier de même le cas où l'on a $U_0 > U_1$.

e) En déduire que Q est la réunion de E_0, E_1, $E_{+\infty}$.

I.7. Etablir pour une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ donnée de S les propriétés suivantes :

a) S'il existe N tel que U_N et U_{N+1} sont strictement supérieurs à 1, la suite tend vers $+\infty$.

b) S'il existe N tel que U_N et U_{N+1} sont strictement inférieurs à 1, la suite tend vers zéro.

Tourner la Page

Deuxième Partie *Etude de quelques propriétés de E_0, E_1, $E_{+\infty}$.*

Les notations restent celles définies dans le préambule.

II.1.a) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble C_2 des points (x, y) de Q tels que $U_2(x, y) = 1$.

Pour quels points de Q a-t-on $U_2(x, y) < 1$ (resp : > 1) ?

b) Déterminer et représenter sur la même figure l'ensemble C_3 des points (x, y) de Q tels que $U_3(x, y) = 1$. On pourra mettre cette équation sous la forme $x = h(y)$, où h est une fonction convenable. On précisera les points situés sur les axes de coordonnées et les tangentes en ces points. Pour quels points de Q a-t-on $U_3(x, y) < 1$ (resp : > 1) ?

c) Préciser la position relative de C_2 et C_3.

d) Déduire de ce qui précède une portion de Q incluse dans E_0 et une portion de Q incluse dans $E_{+\infty}$ (utiliser I.7).

II.2.a) Démontrer que, pour tout n, la fonction qui à tout point (x, y) de Q associe $U_n(x, y)$ est continue.

b) Soit M = (x, y) un point de E_0 (resp : $E_{+\infty}$). Déduire de I.7 que tout point Q assez proche de M est aussi dans E_0 (resp : $E_{+\infty}$).

II.3 Soit M = (x, y) un point de Q autre que O et D la demi-droite issue de O et passant par M.

a) k désignant un réel positif, établir que :

si $k > 1$, l'on a, pour tout n, $U_n(kx, ky) \geq k\, U_n(x, y)$

si $k < 1$, l'on a, pour tout n, $U_n(kx, ky) \leq k\, U_n(x, y)$.

b) On suppose que M appartient à E_0.

Etablir que le segment OM est inclus dans E_0.

c) On suppose que M appartient à $E_{+\infty}$. Que dire des points de D qui sont plus loin de O que M ?

d) On suppose que M appartient à E_1. Préciser l'intersection de D avec E_0, E_1, $E_{+\infty}$.

II.4. Soit D une demi-droite d'origine O incluse dans Q.

a) Montrer que D contient des points de E_0 et des points de $E_{+\infty}$, ainsi qu'au plus un point de E_1.

b) $M_0(x_0, y_0)$ étant un point de D, on paramètre D sous la forme :

$t \longrightarrow (tx_0, ty_0) = M_t$, où t décrit l'ensemble des réels positifs au sens large. Ω désignant l'ensemble des t tels que M_t appartienne à E_0, montrer que Ω est borné.

c) Soit γ la borne supérieure de Ω. Montrer que $[OM_\gamma[$ est inclus dans E_0.

d) Montrer par l'absurde que M_γ appartient à E_1 ; on utilisera II.2. Quelle est l'intersection de D avec E_0, E_1, $E_{+\infty}$?

II.5. Soit a l'unique réel strictement positif tel que le point (a, 0) appartienne à E_1. En utilisant les résultats de I.7, trouver la valeur décimale approchée à 10^{-1} près par défaut de a.

II.6. Faire un tracé approximatif figurant E_0, E_1, $E_{+\infty}$.

Troisième Partie

Etude de la rapidité de croissance des suites de S tendant vers $+\infty$.

III.1. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque appartenant à S. Démontrer, pour tout $n \geq 2$, les inégalités : $\frac{1}{2} U_n^2 \leq U_{n+1} \leq U_n + \frac{1}{2} U_n^2$

III.2. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante appartenant à S et tendant vers $+\infty$. On pose $V_n = \frac{1}{2} U_n$ et $z_n = 2^{-n} \ln V_n$ où ln désigne le logarithme népérien.

a) Etablir pour $n \geq 2$ la double inégalité : $0 \leq z_{n+1} - z_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{V_n}$

b) Donner la nature de la série de terme général $z_{n+1} - z_n$. En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ admet une limite finie L. Cette limite dépend de U_0 et U_1 ; on ne cherchera pas à l'évaluer.

c) Etablir pour $n \geq 2$ la double inégalité : $L - \frac{1}{2^n V_n} \leq z_n \leq L$.

En déduire un équivalent de U_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on posera $e^L = M$).

d) Trouver une constante A tel que, pour tout n vérifiant $n \geq 2$ et $U_n > 4$, l'on ait : $0 \leq 2M^{\binom{2^n}{}} - U_n \leq A$

III.3. On prend ici $U_0 = U_1 = 2$.

a) Quelle est la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$? Pour quels n a-t-on $U_n > 4$?

b) Calculer U_6 ; en déduire la valeur décimale approchée de L à 10^{-6} près par défaut.

c) En déduire un encadrement du logarithme décimal de U_{20} entre deux entiers consécutifs. Combien de chiffres a U_{20} ?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail